Några uppgifter om polynomdivision

1. Utför divisionerna nedan

a) $$\frac{1{,}0x^3 + 8{,}0x^2 + 17{,}0x + 10{,}0}{1{,}0x + 3{,}0}$$

b) $$\frac{-2{,}0x^3 + 14{,}0x^2 - 20{,}0x}{1{,}0x - 3{,}0}$$

c) $$\frac{2{,}0x^3 + 4{,}0x^2 - 6{,}0x}{2{,}0x + 2{,}0}$$

d) $$\frac{1{,}0x^3 + 7{,}0x^2 + 2{,}0x - 40{,}0}{1{,}0x - 2{,}0}$$

2. Polynomet $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ kan skrivas på formen $(x-3)\cdot(x-a)^2$
Bestäm talet a

3. a) Bestäm kvot och rest vid nedanstående division.

$$\frac{1{,}0x^3 + 2{,}0x^2 + 1{,}0x}{1{,}0x - 3{,}0}$$

b) Enligt den s.k. *restsatsen* kan resten vid en division förutbestämmas genom följande:
Beräkna det värde på x som gör att nämnaren blir noll.
Det värdet insatt i täljaren ger sedan värdet på resten.
Kontrollera att det stämmer i detta fall.

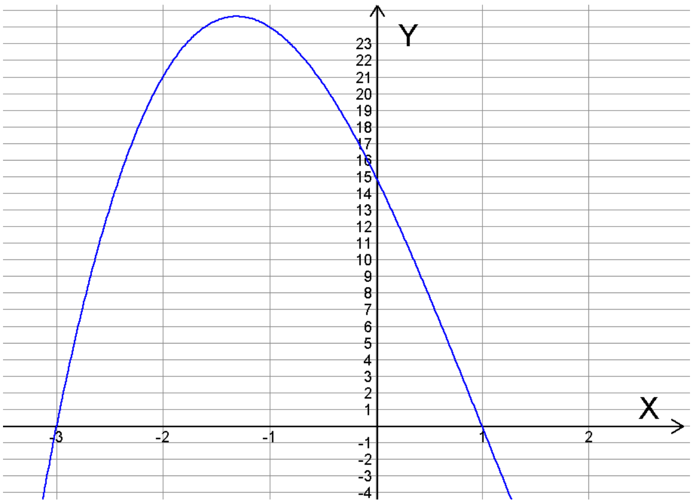
4. Låt $p(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$.

a) Visa att $x = -1$ är en lösning till ekvationen $p(x) = 0$

b) Eftersom $x = -1$ är en lösning måste resten bli noll vid division med faktorn $(x + 1)$. (Varför?) Visa att det stämmer.

c) $p(x)$ kan skrivas på formen $p(x) = (x + 1) \cdot (andragradspolynom)$
Bestäm andragradspolynomet

5. Grafen nedan visar en del av grafen till funktionen $p(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$



a) Använd grafen till att bestämma de *synliga* lösningarna till ekvationen $p(x) = 0$

b) Svaret i a) ger att det finns två möjliga nämnare som kommer ge resten noll om $p(x)$ delas med dessa. Vilka två nämnare är det?

c) Bestäm det tredje nollstället till $p(x)$

6. Funktionen $p(x) = -0{,}5x^3 - 3x^2 + 0{,}5x + 15$ har ett nollställe vid $x = 2$.

Bestäm de övriga två nollställena.

Facit - Några uppgifter om polynomdivision

1. Utför divisionerna nedan

a)

$1{,}0x^2 + 5{,}0x + 2{,}0$

$1{,}0x^3 + 8{,}0x^2 + 17{,}0x + 10{,}0 \quad \boxed{1{,}0x + 3{,}0}$

$-(1{,}0x^3 + 3{,}0x^2)$

$0\,x^3 + 5{,}0x^2$

$-(+5{,}0x^2 + 15{,}0x)$

$0\,x^2 \quad + 2{,}0x$

$-(+2{,}0x + 6{,}0)$

$0\,x \quad + 4{,}0$

b)

$-2{,}0x^2 + 8{,}0x + 4{,}0$

$-2{,}0x^3 + 14{,}0x^2 - 20{,}0x \quad \boxed{1{,}0x - 3{,}0}$

$-(-2{,}0x^3 + 6{,}0x^2)$

$0\,x^3 + 8{,}0x^2$

$-(+8{,}0x^2 - 24{,}0x)$

$0\,x^2 \quad + 4{,}0x$

$-(+4{,}0x - 12{,}0)$

$0\,x \quad + 12{,}0$

c)

$1{,}0x^2 + 1{,}0x - 4{,}0$

$2{,}0x^3 + 4{,}0x^2 - 6{,}0x \quad \boxed{2{,}0x + 2{,}0}$

$-(2{,}0x^3 + 2{,}0x^2)$

$0\,x^3 + 2{,}0x^2$

$-(+2{,}0x^2 + 2{,}0x)$

$0\,x^2 \quad - 8{,}0x$

$-(-8{,}0x - 8{,}0)$

$0\,x \quad + 8{,}0$

d)

$1{,}0x^2 + 9{,}0x + 20{,}0$

$1{,}0x^3 + 7{,}0x^2 + 2{,}0x - 40{,}0 \quad \boxed{1{,}0x - 2{,}0}$

$-(1{,}0x^3 - 2{,}0x^2)$

$0\,x^3 + 9{,}0x^2$

$-(+9{,}0x^2 - 18{,}0x)$

$0\,x^2 \quad + 20{,}0x$

$-(+20{,}0x - 40{,}0)$

$0\,x \quad - 0{,}0$

2. Utför divisionen $\frac{x^3-5x^2+7x-3}{x-3} = (x^2 - 2x + 1) = (x-1)^2$

Talet a är alltså 1

3. a)

$1{,}0x^2 + 5{,}0x + 16{,}0$

$1{,}0x^3 + 2{,}0x^2 + 1{,}0x \quad \boxed{1{,}0x - 3{,}0}$

$-(1{,}0x^3 - 3{,}0x^2)$

$0\,x^3 + 5{,}0x^2$

$-(+5{,}0x^2 - 15{,}0x)$

$0\,x^2 \quad + 16{,}0x$

$-(+16{,}0x - 48{,}0)$

$0\,x \quad + 48{,}0$

Kvot: $x^2 + 5x + 16$

Rest: 48

b) Talet som ger nämnaren noll är $x = 3$. Det insatt i täljaren ger,

$3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 = 27 + 18 + 3 = 48$

Resten blev alltså 48 vid såväl divisionen som vid ”restsatsen”-tänket

4. Låt $p(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$.

a) Stoppa in $x = -1$ och beräkna svaret.
Blir det noll är $x = -1$ en lösning.

$$p(-1) = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 5(-1) + 12 = -1 - 6 - 5 + 12 = 0$$

b) Att resten blir noll är detsamma som att $p(x)$ kan skrivas som
$p(x) = (x+1)(\quad)(\quad)$
dvs divideras $(x+1)$ ned fås endast en kvot och ingen rest.

Den divisionen:

$$\begin{array}{ll}
\overline{x^2 - 7x + 12} & \\
x^3 - 6x^2 + 5x + 12 & \underline{|x+1} \\
\underline{(x^3 + x^2)} & \\
-7x^2 & \\
\underline{-(-7x^2 - 7x)} & \\
12x & \\
\underline{-(12x + 12)} & \\
0 &
\end{array}$$

Resten 0

c) Andragradspolynomet är den kvot som divisionen gav, dvs $x^2 - 7x + 12$

5. a) Två av lösningarna till $p(x) = 0$ är $x = -3$ och $x = 1$

b) De båda faktorerna som hör ihop med de båda lösningarna är,
$(x+3) \cdot (x-1)$

c) Dela med valfri av de båda faktorerna (eller båda två!), och lös ekvationen
”kvoten = 0”. Ex: $\frac{p(x)}{x-1} = x^2 - 2x - 15$.
Lös sedan den andragradsekvation som uppstår när kvoten sätts till noll,
dvs $x^2 - 2x - 15 = 0$ (använd p-q-formeln). Den har lösningarna:
$x = -3$ och $x = 5$

De tre lösningarna är alltså $x = -3$, $x = 1$ och $x = 5$

6. Samma tänk som i uppgift 5. Det givna nollstället, $x = 2$, säger att en av de tre faktorerna till $p(x)$ ska vara $(x-2)$, dvs $p(x) = (x-2)(\quad)(\quad)$

De andra två fås genom att dividera ned $(x-2)$.

Utförs polynomdivisionen $\frac{p(x)}{x-2}$ blir svaret $-0{,}5x^2 - 4x - 7{,}5$

”p-q:as” denna kvot fås $x = -5$ och $x = -3$ vilket alltså är de två andra lösningarna till $p(x)$